



## Gymnázium a Střední odborná škola, Rokycany, Mládežníků 1115

Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0410
Číslo šablony:	III/2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Název materiálu:	Úpravy goniometrických výrazů
Ročník:	2. ročník SOŠ
Identifikace materiálu:	MIL_32_9
Jméno autora:	Martin Milota
Předmět:	matematika
Tématický celek:	Vztahy mezi goniometrickými funkcemi
Anotace:	Pracovní list zaměřený na úpravu goniometrických výrazů s využitím základních vztahů pro goniometrické funkce, vztahů pro dvojnásobný argument a také součtových vzorců.
Datum:	25. 4. 2013

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

A. Pomocí základních vztahů mezi goniometrickými funkcemi upravte následující výrazy:

$$1) \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$4) \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} =$$

$$2) \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} =$$

$$5) \left( \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right) \left( \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) =$$

$$3) \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} =$$

$$6) \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos x - \sin^2 x \cdot \cos x} =$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cot} x = 1$$

B. Pomocí vztahů pro sin, cos, tg a cotg ze součtu a rozdílu argumentů upravte následující výrazy:

$$7) \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} =$$

$$8) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$9) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x} =$$

$$10) \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) =$$

$$11) \sin(45^\circ + x) - \sin(45^\circ - x) =$$

$$12) \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{cot} g(x \pm y) = \frac{\operatorname{cot} g x \cdot \operatorname{cot} g y \mp 1}{\operatorname{cot} g y \pm \operatorname{cot} g x}$$

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

$$1) \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$2) \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$$

$$3) \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$4) \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x) + \sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x(1 - \cos x + 1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$5) \left( \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right) \left( \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) = \left( \frac{1}{\cos x} \right)^2 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$$6) \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos x - \sin^2 x \cdot \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos x(1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin x \cdot \sin^2 x}{\cos x \cdot \cos^2 x} = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)^3 = \operatorname{tg}^3 x$$

$$7) \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} + \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \operatorname{tg} x$$

$$8) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$9) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1}} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$10) \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos\frac{\pi}{6} \cos x + \sin\frac{\pi}{6} \sin x - (\cos\frac{\pi}{6} \cos x - \sin\frac{\pi}{6} \sin x) = 2 \sin\frac{\pi}{6} \sin x = \sin x$$

$$11) \sin(45^\circ + x) - \sin(45^\circ - x) = \sin 45^\circ \cos x + \cos 45^\circ \sin x - (\sin 45^\circ \cos x - \cos 45^\circ \sin x) =$$

$$= 2 \cos 45^\circ \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

$$12) \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} + \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} - (\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4})} = \frac{2 \sin x \cos \frac{\pi}{4}}{2 \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} x$$