

Aritmetická posloupnost

vzorec pro n-tý člen



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



Gymnázium a Střední odborná škola, Rokycany, Mládežníků 1115

Číslo projektu:	CZ.1.07/1.5.00/34.0410
Číslo šablony:	III/2 Inovace a zkvalitnění výuky prostřednictvím ICT
Název materiálu:	Aritmetická posloupnost a vzorec pro n-tý člen
Ročník:	Třetí ročník SOŠ
Identifikace materiálu:	MIL_32_3
Jméno autora:	Martin Milota
Předmět:	matematika
Tématický celek:	Posloupnosti
Anotace:	Prezentace v MS Powerpoint určená pro výuku základních vlastností aritmetické posloupnosti, vlastností jejích členů a také řešených typových úloh s využitím této posloupnosti.
Datum:	28. 8. 2013

Aritmetická posloupnost (AP)

- Je taková posloupnost, která má stálý rozdíl mezi libovolnými dvěma sousedními členy.
- 2 4 6 8 10 12 14 16 18 ...
- Tento rozdíl (v našem případě = 2) se jmenuje diference a označuje se d .
- Díky této pravidelnosti dokážeme snadno zjistit mnoho zajímavých vztahů mezi členy této posloupnosti.

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 6$$

- Kolik je a_6 ?
- Protože se každé dva členy liší o $d = 2$, stačí jen zjistit, o kolik „mezer“ se liší šestý člen od prvního.

$$a_6 - a_1 = 5d \quad (\text{zkuste si to na prstech})$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 12$$

Obecně tedy: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

- Díky této pravidelnosti nám tedy stačí znát jen libovolný člen a diferenci AP nebo libovolné dva členy a víme o této posloupnosti vše.

- *Příklad 1:* V AP je $a_1 = 4$ a $d = 0,1$. Kolik je a_{100} ?

$$a_{100} = a_1 + (n-1)d$$

$$\mathbf{a_{100} = 4 + 99 \cdot 0,1 = 13,9}$$

- *Příklad 2:* Jsou dány dva členy AP $a_5 = 17$ a $a_7 = 13$. Určete první člen a diferenci.

$$a_7 - a_5 = 2d$$

$$17 - 13 = 2d$$

$$\mathbf{d = 2}$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_1 = a_5 - 4d$$

$$\mathbf{a_1 = 9}$$

- Mezi další úlohy pak samozřejmě patří bezpečně poznat AP a také velmi „zvláštní“ soustavy rovnic.
- *Příklad 3:* Je dána posloupnost vzorcem pro n-tý člen.
Je to AP?

$$(2n + 3)_{n=1}^{\infty} \quad \left(\frac{1}{n^2} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$a_1 = 5$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 7$$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = 9$$

$$a_3 = \frac{1}{9}$$

První posloupnost je aritmetická, protože se následující členy od sebe liší o dva. Druhá posloupnost není aritmetická, protože rozdíl mezi druhým a prvním členem není stejný jako rozdíl mezi třetím a druhým.

- *Příklad 4:* Určete a_1 a d aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$4a_4 - a_2 = -2$$

$$\underline{a_1 + 3a_3 = 6}$$

Zdánlivě neřešitelná úloha, protože má 4 neznámé. Ale s využitím AP můžeme snadno převést všechny neznámé na a_1 a d .

$$4(a_1 + 3d) - (a_1 + d) = -2$$

$$\underline{a_1 + 3(a_1 + 2d) = 6}$$

A pak už je to snadné:

$$3a_1 + 11d = -2$$

$$\underline{4a_1 + 6d = 6}$$

$$a_1 = 3$$

$$d = -1$$

Procvičování

$$1: -65; -55; -45; -35; -25$$

$$2: a_{77} = -145$$

$$3: a_1 = 2, d = 2$$

- *Úloha 1:* Vypočtete prvních pět členů AP, ve které je $a_9 = 15$ a $a_{10} = 25$.
- *Úloha 2:* V AP je dáno $a_1 = 7$ a $d = -2$. Určete a_{77} .
- *Úloha 3:* Určete první člen a diferenci v AP, jestliže platí:
$$2a_3 - 3a_1 = 6$$
$$\underline{a_4 + 2a_1 = 12}$$

- Jak souvisí aritmetický průměr s aritmetickou posloupností?

Když máme tři po sobě jdoucí členy AP, je prostřední člen vždycky aritmetickým průměrem zbylých dvou členů.

např.: 5, 7 a 9 jsou tři po sobě jdoucí členy AP.

$$\frac{5 + 9}{2} = 7$$

DCV

- Aritmetickou posloupnost tvoří prvních sto přirozených čísel. Jaký je její součet? Dá se nějak postup pro získání tohoto součtu zobecnit?